



TITLE:

# $L^1$ 最適制御のスパース性について

AUTHOR(S):

永原, 正章

---

CITATION:

永原, 正章.  $L^1$  最適制御のスパース性について. 電子情報通信学会技術研究報告 2013

ISSUE DATE:

2013

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/179463>

RIGHT:

© 2013 IEICE.

社団法人 電子情報通信学会  
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,  
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS信学技報  
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

# $L^1$ 最適制御のスパース性について

永原 正章<sup>†</sup><sup>†</sup> 京都大学情報学研究科 〒606-8501 京都市左京区吉田本町

あらまし  $L^1$  ノルムで定義された評価関数を最小化する最適制御問題は、最小燃料制御問題と呼ばれ、1960 年代より研究されているたいへん古い制御問題である。一方、 $L^1$  ノルムを用いた最適化問題は、信号処理の分野で圧縮センシングと呼ばれ、近年盛んに研究されている。これを受けて、最近では、特にネットワーク化制御系における通信制約に対処するために、 $L^1$  評価基準を用いて、制御信号をスパース化する手法が提案されている。しかし、 $L^1$  最適制御問題（もしくは最小燃料問題）と制御信号のスパース性の関連については、これまでほとんど研究されてこなかった。そこで、本稿では、まず 2 重積分系に対する  $L^1$  最適制御を具体的に求め、そのスパース性を調べる。次に、より一般の線形システムに対する  $L^1$  最適制御問題の解が、許容される解の中で最もスパースであることを理論的に示す。また、ネットワーク化制御系における  $L^1$  最適制御の有効性について議論する。

キーワード  $L^1$  最適制御、最小燃料制御、スパース性、圧縮センシング、ネットワーク化制御

## On Sparsity of $L^1$ -Optimal Control

Masaaki NAGAHARA<sup>†</sup><sup>†</sup> Graduate School of Informatics, Kyoto University Sakyo-ku, Yoshida-Honmachi, Kyoto, 606-8501 Japan

**Abstract**  $L^1$ -optimal control, also known as minimum-fuel control, is a classical control problem, which has been researched since 1960's. In contrast, compressed sensing, which is based on  $L^1$  optimization, has been recently studied in signal processing. Motivated this, sparsity promoting methods based on  $L^1$  optimization have been also proposed for rate-limited networked control systems. However, the theoretical relationship between sparsity and  $L^1$ -optimal control has not been studied. In this article, we first show an example of control of a double-integrator system and illustrate that the  $L^1$ -optimal control is sparse. Then we prove that the solutions of an  $L^1$ -optimal control problem are the sparsest among the admissible controls. We also discuss the effectiveness of  $L^1$  optimal control in networked control systems.

**Key words**  $L^1$ -optimal control, minimum-fuel control, sparsity, compressed sensing, networked control

### 1. はじめに

無人の火星探査機を地球から発射し、一定時間内（例えば 1 年）で火星に着陸させるという問題を考える。途中で燃料を補給することはできないので、燃料消費は最小限にしたい。このとき、どのような運航方法が一番良いのだろうか。

およそ 50 年前に出版された最適制御の教科書 [1] に、この制御問題の解法が詳細に述べられている。それによると、最適制御は以下になる。まず火星に向けてフルスロットルで一定時間加速し、その後、エンジンを切ってしばらく惰性で等速直線運動を行い、火星に近づいたら、逆向きにフルスロットル加速（すなわち減速）を行い着地させる。このような制御は「バン-オフ-バン制御」(bang-off-bang control) と呼ばれ、 $L^1$  最適制御問題の解として与えられる。これは、単位時間当たり

の燃料消費率が制御の振幅の絶対値としてモデル化されることにもとづく。このような制御は、最小燃料制御 (minimum-fuel control) とも呼ばれる。

この制御の興味深い点は、 $L^1$  最適制御（最小燃料制御）が、制御しない（すなわち制御入力 が 0 である）区間を最大化しているように見えることである。制御入力が 0 であれば燃料消費は 0 であるので、そのような区間が長ければ長いほど消費する燃料は少ないことが期待できる。このような性質は、圧縮センシング (compressed sensing) における  $\ell^1$  最適化とスパース性の関係を想起させる。

圧縮センシングは、元信号のスパース性にもとづき、従来の理論で必要とされているよりもはるかに少ないサイズのデータから信号復元を可能にする理論である [3], [4], [11]。その信号復元過程においてベクトルの  $\ell^1$  最適化が用いられ、その解のス

パース性や復元性能に関して、近年、特に信号処理や情報理論の分野で盛んに研究されている。特に、 $\ell^1$  最適化問題の解が、その評価関数の  $\ell^1$  ノルムの項を  $\ell^0$  ノルムに変えた最適化問題の解と一致するための十分条件を求めることは、圧縮センシングにおける基本的な問題であり、かつ重要である。なぜなら、圧縮センシングでは、2 次元画像などの非常に大きなデータに対して、組み合わせ最適化である  $\ell^0$  最適化問題を解く必要があるが、その解が凸最適化である  $\ell^1$  最適化の解と一致することが保証されれば、きわめて効率よく解が求まるからである。

同様に最も 0 の区間が長い、言い換えれば最もスパースな制御入力を求める最適制御問題も、そのままでは非常に解きにくい、それが先に述べた  $L^1$  最適制御問題（もしくは最小燃料問題）の解と一致すれば、そのような制御入力は容易に求まる。このような観点からの研究、すなわち、 $L^1$  最適制御のスパース性に関する研究は、これまでなされてこなかったが、本稿では、その足がかりとして、最も簡単な線形時不変系に対する制御問題を考え、問題の正規性の仮定のもとで、 $L^1$  最適制御問題の解が最もスパースな許容解となることを示す。

制御信号のスパース性は、先の述べた燃料消費の最小化だけでなく、ネットワーク化制御系 [2], [5], [12] でも有用である。離散時間のネットワーク化制御系において、スパースなベクトルで表現された制御信号は、例えば非零の要素の値とその位置を符号化すれば、単純な量子化器による効率の良いデータ圧縮が可能である [6], [7], [9]。同様に、本稿で考察する正規な  $L^1$  最適制御問題では、解は先に述べたように「バン・オフ・バン」型の制御となり、制御値の切り替えの方向（プラスかマイナス）とそのタイミングだけを送信するだけでよく、通信帯域の制限が厳しいネットワーク化制御系（例えば火星探査機など）においてきわめて有効な方法であるといえる。

本稿の構成は以下のとおりである。第 1 節では、本稿で用いる連続時間信号の各種ノルムの定義を与え、連続時間信号に対してスパース性の概念を導入する。第 2 節では、上で述べた火星探査機の最も単純なモデルである 2 重積分器を例に用いて、 $L^1$  最適制御とそのスパース性について考察する。第 3 節では、一般の線形時不変系に対して、正規性の仮定のもとで、 $L^1$  最適制御問題の解が最もスパースな許容制御となることを示す。第 4 節では、帯域制限のあるネットワーク化制御系におけるスパースな制御の有効性について議論する。

## 2. 数学的準備

時間区間  $[0, T]$  上の連続時間信号  $u(t)$  にたいして、その  $L^p$  ノルム ( $p \geq 1$ ) を

$$\|u\|_p = \left( \int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1)$$

で定義する。また、 $u$  の  $L^0$  ノルム<sup>(注1)</sup>をその台の長さ、すな

(注1): ここで定義された  $\|u\|_0$  は厳密にはノルムではない。なぜなら、斉次性、すなわちスカラー  $a$  と信号  $u$  に対して  $\|au\|_0 = |a|\|u\|_0$  が一般には成り立たないからである。しかし、慣例として「 $L^0$  ノルム」のような言い方がよく使われる。

わち

$$\|u\|_0 = \mu(\text{supp}(u)) = \mu(\{t \in [0, T] : u(t) \neq 0\}), \quad (2)$$

で定義する。ここで、 $\mu$  は  $\mathbb{R}$  上の Lebesgue 測度であり、 $\text{supp}(u)$  は連続時間信号  $u$  の台を表す。区間  $[0, T]$  上の連続時間信号  $u(t)$  がスパースであるとは、区間幅  $T$  に比べて  $\|u\|_0$  が非常に小さいことを言う。この定義は、圧縮センシング等で用いられるベクトルの  $\ell^0$  ノルムのアナロジーである。すなわち、ベクトルの  $\ell^0$  ノルムはその非ゼロ要素の数として定義され、スパースなベクトルとは、その  $\ell^0$  ノルムが非常に小さいベクトルのことである。詳しくは [4], [11]などを参照されたい。

実数  $x$  に対して、

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ -1, & \text{if } x < 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \end{cases} \quad (3)$$

と定義する。

## 3. $L^1$ 最適制御の例

ここでは、制御対象の例として 2 重積分器 (double integrator) を採り上げ、その  $L^1$  最適制御のスパース性について考察する。ここで、2 重積分器とは、入出力関係が次の伝達関数で表されるシステムのことである：

$$P(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (4)$$

これは、単位質量のロケットが宇宙空間を推進する最も単純なモデルである<sup>(注2)</sup>。また、(4) で表される伝達関数の状態空間表現は次で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

ここで、初期値は  $(x_1(0), x_2(0)) = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$  とする。この制御対象に対して、時間  $T > 0$  で状態を原点に遷移させる、すなわち

$$x_1(T) = x_2(T) = 0 \quad (6)$$

を満足させる制御入力  $\{u(t) : t \in [0, T]\}$  のうち、振幅に対する制約

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T] \quad (7)$$

を満たし、かつ次の評価関数を最小化する制御入力を求める最適制御問題を考える。

$$J(u) = \|u\|_1 = \int_0^T |u(t)| dt. \quad (8)$$

(注2): 実際のロケットは自分自身の質量（燃料など）を反対方向に噴射することによって加速度を得るので、厳密に言えばこのモデルは正しくない（質量を減らさなければ加速度運動はできない）。ここではロケット自体の質量が燃料の質量に比べて十分小さいと仮定している。もしくは、たとえば摩擦のない線路上を移動する新幹線のような（空気抵抗がきわめて小さい）移動体を考えても良い。

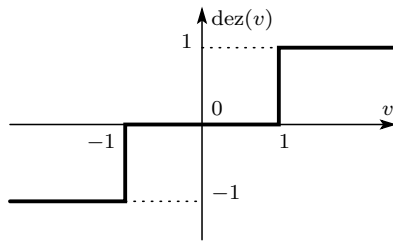


図 1 不感帯関数  $\text{dez}(v)$

ここで、終端時刻  $T > 0$  は固定とし、十分大きいとする<sup>(注3)</sup>。

この最適制御問題の解  $u^*$  を Pontryagin の最小原理 [10] により求める<sup>(注4)</sup>。まず、Hamilton 関数を定義する。

$$H = |u(t)| + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t). \quad (9)$$

ここで、 $p_1(t)$ 、 $p_2(t)$  は状態  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  に対する共状態である。Pontryagin の最小原理より、最適制御  $u^*$  は制約条件 (7) のもとで、Hamilton 関数 (9) を最小化する。ここで、

$$H = \begin{cases} (p_2(t) - 1)u(t) + p_1(t)x_2(t), & \text{if } u(t) < 0, \\ (p_2(t) + 1)u + p_1(t)x_2(t), & \text{if } u(t) > 0 \end{cases} \quad (10)$$

と書けるので、 $p_2(t)$  により場合分けして考えれば、最適制御  $u^*(t)$  は

$$u^*(t) = \text{dez}(p_2(t)) \quad (11)$$

を満たす。ここで  $\text{dez}(\cdot)$  は以下で定義される不感帯関数 (dead-zone function) である (図 1 を見よ)：

$$\text{dez}(v) = \begin{cases} -1, & \text{if } v < -1, \\ 0, & \text{if } -1 < v < 1, \\ 1, & \text{if } 1 < v, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{dez}(v) \in [-1, 0], \text{ if } v = -1,$$

$$\text{dez}(v) \in [0, 1], \text{ if } v = 1.$$

これより、ある時間区間上で恒等的に  $|p_2(t)| = 1$  が成り立つ場合、その区間上で最適制御が (最小原理からは) 一意に確定できない。そのような区間を特異区間 (singular interval) と呼び、長さが正の特異区間が存在するような最適制御問題は「特異である (singular)」という。逆に正の長さの特異区間が存在しない、すなわち、

$$\mu(\{t \in [0, T] : |p_2(t)| = 1\}) = 0 \quad (13)$$

が成り立つような最適制御問題は「正規である (normal)」という。いま考察している 2 重積分系では、制御問題が特異であるか否かは、初期値の位置に依存する。もし、制御問題が正規であれば、ほとんどすべての  $t \in [0, T]$  で  $p_2(t)$  は  $\pm 1$  の値を

(注3)：厳密には、終端時刻  $T$  は最短時間制御問題、すなわち、評価関数として (8) のかわりに  $J = T$  を採用した制御問題の解  $T^*$  よりも大きい必要がある。もし  $T$  が  $T^*$  よりも小さい場合、 $L^1$  最適制御には解は存在しない。詳しくは [1, Lemma 8-7] を参照せよ。

(注4)：最適制御の求め方は、[1, Sec. 8-6] を参照にした。

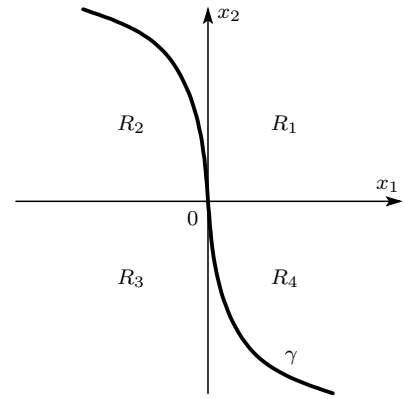


図 2 領域  $R_1, R_2, R_3, R_4$  および曲線  $\gamma$ 。

取らない。すると、(11) および (12) より、最適制御入力  $u$  は、ほとんどすべての  $t \in [0, T]$  で 0 もしくは  $\pm 1$  の値だけを取るようになる。

共状態  $(p_1(t), p_2(t))$  は以下の正準方程式を満たす。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1(t)} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -p_1(t) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

なお、(10) を用いた。正準方程式 (14) を解けば、

$$p_1(t) = \pi_1 = \text{const.}, \quad p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t, \quad (15)$$

$$\pi_1 = p_1(0), \quad \pi_2 = p_2(0) \quad (16)$$

が得られる。(15) より、 $\pi_1 \neq 0$  であれば  $p_2(t)$  は  $t$  の一次式であるので、 $p_2(t)$  は単調であり、したがって (11) と (12) より、切り替えは高々 2 回であり、また切り替えは  $-1$  と  $0$  の間、もしくは  $0$  と  $1$  の間でしか起こりえないことがわかる。切り替えのパターンによって場合分けして最適制御を求めると、以下のようになる [1, Control Law 8-3]：

[補題 1] 終端時刻  $T$  は対応する最短時間制御の最適値  $T^*$  よりも大きいと仮定する。次の各領域を定義する (図 2 を見よ)。

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > -x_2^2/2, x_2 \geq 0\}, \\ R_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -x_2^2/2, x_2 > 0\}, \\ R_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < x_2^2/2, x_2 \leq 0\}, \\ R_4 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > x_2^2/2, x_2 < 0\}, \\ \gamma &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2|x_2|/2\}, \\ V_- &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_2/2 - x_1/x_2 \geq T\}, \\ V_+ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2/2 - x_1/x_2 \geq T\}. \end{aligned} \quad (17)$$

このとき、以下が成り立つ。

(1) 初期値  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  のとき、または  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4 \cap V_-$  のとき、最適制御は

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{if } 0 \leq t < t_1, \\ 0, & \text{if } t_1 \leq t < t_2, \\ 1, & \text{if } t_2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (18)$$

ただし、

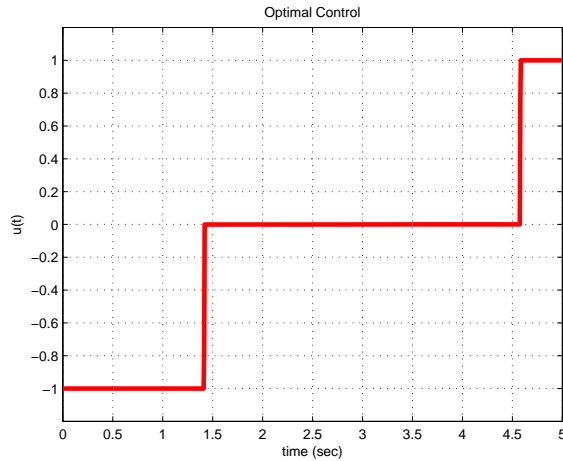


図 3 2 重積分系に対する  $L^1$  最適制御

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{T + \xi_2 - \sqrt{(T - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2}}{2}, \\ t_2 &= \frac{T + \xi_2 + \sqrt{(T - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2}}{2}, \end{aligned} \quad (19)$$

で与えられる．

(2) 初期値  $(\xi_1, \xi_2) \in R_3$  のとき, または  $(\xi_1, \xi_2) \in R_2 \cap V_+$  のとき, 最適制御は

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq t < t_3, \\ 0, & \text{if } t_3 \leq t < t_4, \\ -1, & \text{if } t_4 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (20)$$

ただし,

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{T - \xi_2 - \sqrt{(T + \xi_2)^2 + 4\xi_1 - 2\xi_2^2}}{2}, \\ t_4 &= \frac{T - \xi_2 + \sqrt{(T + \xi_2)^2 + 4\xi_1 - 2\xi_2^2}}{2}, \end{aligned} \quad (21)$$

で与えられる．

(3) 初期値  $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma$  のとき, 最適制御は

$$u^*(t) = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(\xi_2), & \text{if } 0 \leq t < |\xi_2|, \\ 0, & \text{if } |\xi_2| \leq t \leq T, \end{cases} \quad (22)$$

で与えられる．

(4) 初期値  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4 \cap (V_-)^c$  のとき, または  $(\xi_1, \xi_2) \in R_2 \cap (V_+)^c$  のとき<sup>(注5)</sup>, 最適制御問題は特異であり, 最適制御は一意に定まらない．

終端時刻を  $T = 5$ , 初期値を  $(\xi_1, \xi_2) = (1, 1) \in R_1$  としたときの  $L^1$  最適制御を図 3 に, また対応する状態の軌跡  $\{(x_1(t), x_2(t)) : 0 \leq t \leq 5\}$  を図 4 に示す．図 3 において, 最適制御が 0 の値をとる区間は, (19) より

$$\begin{aligned} [t_1, t_2] &= [3 - \sqrt{10}/2, 3 + \sqrt{10}/2] \\ &\approx [1.4189, 4.5811] \end{aligned} \quad (23)$$

(注5):  $(\cdot)^c$  は補集合を表す．

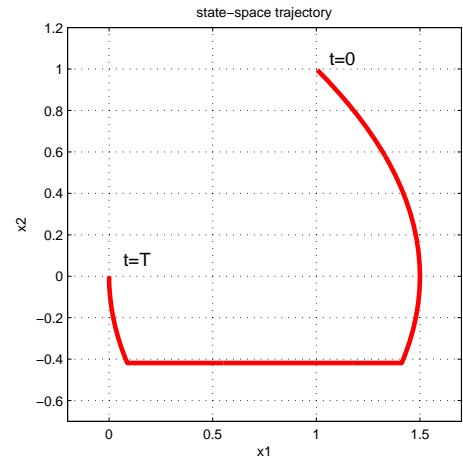


図 4  $L^1$  最適制御による状態  $(x_1(t), x_2(t))$  の軌跡

であり, その区間の幅, すなわち最適制御  $u^*$  の  $L^0$  ノルムは

$$\|u^*\|_0 = \sqrt{10} \approx 3.1623 \quad (24)$$

となることがわかる．この区間における状態  $(x_1(t), x_2(t))$  の軌跡は, 図 4 からわかるように  $x_1$  軸に平行な軌跡となり,  $x_1$  を位置,  $x_2$  を速度とすれば, この区間では等速運動をしていることがわかる．このような運動は明らかに燃料消費を少なくし, 制御が 0 である区間が長ければ長いほど, その燃料消費は少ない．では, そのような区間をもっと長くすることはできるだろうか? すなわち, 状態を  $(1, 1)$  から原点まで 5 秒間で遷移させ, かつ制約 (7) を満たす制御 (このような制御を許容制御と呼ぶ) のうち, 0 である区間を最大にする制御, 言い換えれば最もスパースな許容制御は求めることができるのだろうか? 実は, 図 3 に示した  $L^1$  最適制御が最もスパースなく (すなわち最も  $L^0$  ノルムが小さい) 許容制御であることを次節で示す．

#### 4. $L^1$ 最適制御のスパース性

ここでは次の線形モデルで表される制御対象を考える．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t). \quad (25)$$

ただし,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$  とし,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  とする．この制御対象に対し, 初期値  $x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n$  から, 終端値  $x(T) = 0$  まで状態を遷移させる制御入力で, 制約

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T] \quad (26)$$

を満たす許容制御のうち, 次の  $L^1$  評価関数を最小化する制御入力  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  を求める:

$$J(u) = \|u\|_1 = \int_0^T |u(t)| dt. \quad (27)$$

この  $L^1$  最適制御に対する Hamilton 関数は以下で与えられる:

$$H(x, p, u) = |u| + p^\top (Ax + Bu). \quad (28)$$

ここで,  $p(t)$  は状態  $x(t)$  の共状態である．



$L^1$  最適制御  $u^*(t)$  とそれに対応する状態遷移  $x^*(t)$  が存在すると仮定する．Pontryagin の最小原理より，ある共状態  $p^*(t)$  が存在して，任意の許容制御  $u$  に対して，

$$H(x^*, p^*, u^*) \leq H(x^*, p^*, u) \quad (29)$$

が成り立つ．ここで，(28) の  $H$  を最小化する  $u^*$  は以下で与えられることが簡単な計算によりわかる：

$$u^*(t) = -\text{dez}(B^\top p^*(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (30)$$

ここで， $\text{dez}(\cdot)$  は (12) で定義される不感帯関数である（図 1 も見よ）．前節と同様の議論より，もし  $|B^\top p^*(t)| = 1$  である区間の長さが 0，すなわち制御問題が正規である場合，ほとんどすべての  $t \in [0, T]$  に対して  $L^1$  最適制御入力  $u^*(t)$  は 0 または  $\pm 1$  の値だけを取る．この事実から，次の定理を得る．

[定理 1]  $L^1$  最適制御問題は正規であり，かつ最適解が存在すると仮定する．このとき， $L^1$  最適制御は最もスパースな許容制御である．すなわち， $L^1$  最適制御は次の  $L^0$  評価関数

$$J_0(u) = \|u\|_0 \quad (31)$$

を最小化する．

**Proof.** 許容制御の集合を  $\mathcal{U}$  とおく．すなわち， $u \in \mathcal{U}$  ならば， $u$  は状態  $x(t)$  を  $x(0) = \xi$  から  $x(T) = 0$  まで遷移させ，かつ

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T] \quad (32)$$

を満たす．これより，任意の  $u \in \mathcal{U}$  に対して

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T |u(t)| dt = \int_{\text{supp}(u)} |u(t)| dt \\ &\leq \int_{\text{supp}(u)} 1 dt = \|u\|_0 = J_0(u). \end{aligned} \quad (33)$$

が成り立つ．次に  $u^*$  を  $L^1$  最適制御とする．ここで， $u^* \in \mathcal{U}$  である．制御問題の正規性の仮定より， $u^*(t)$  はほとんどすべての  $t \in [0, T]$  で，0 または  $\pm 1$  の値をとる．これより，

$$\begin{aligned} J(u^*) &= \int_0^T |u^*(t)| dt = \int_{\text{supp}(u^*)} |u^*(t)| dt \\ &= \int_{\text{supp}(u^*)} 1 dt = \|u^*\|_0 = J_0(u^*). \end{aligned} \quad (34)$$

(33) と (34) より， $L^1$  最適制御  $u^* \in \mathcal{U}$  は  $J_0(u)$  を最小化することがわかる．□

この定理より， $L^1$  最適制御は 0 である区間が最も長い，すなわち最もスパースな制御であることがわかる．このようなスパースな制御入力は，特にネットワーク化制御系で有用であることを次節で示す．

## 5. ネットワーク化制御

図 3 で示したような「バン-オフ-バン制御」は燃料消費を最小化するだけでなく，ネットワーク化制御系においても有用である．なぜなら，このような制御信号をネットワーク経由で送

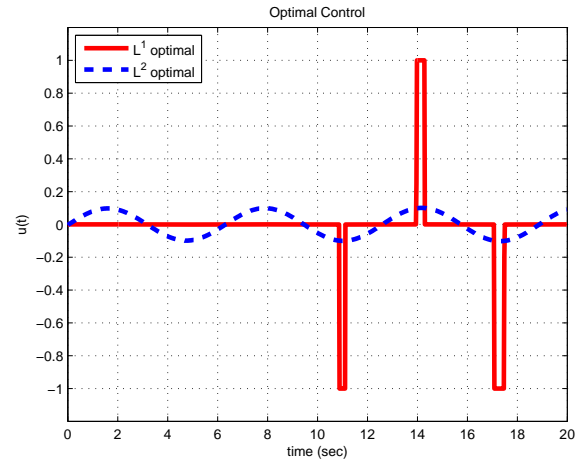


図 5 2 次系に対する  $L^1$  最適制御（実線）および  $L^2$  最適制御（破線）

信する場合，

- 初期時刻の制御の値 (0 または  $\pm 1$ )
- 切り替えのタイミング (有限個)
- そのタイミングでの制御の値の増減 ( $\pm 1$ )

の情報だけを送信すれば，受信側で制御信号を完全に復元できるからである．なお，切り替えのタイミングでの制御値の増減が  $\pm 1$  に限られるという事実は，制御入力の式 (30) と信号  $B^\top p^*(t)$  の連続性より言える．一方，従来より制御でよく用いられる  $L^2$  評価関数を最小化する問題（最小エネルギー問題と呼ぶ），すなわち評価関数として (27) の代わりに

$$J_2(u) = \|u\|_2^2 = \int_0^T |u(t)|^2 dt \quad (35)$$

を最小化する問題の解は一般にスパースではない．例えば，次の制御対象

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.005 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad t \geq 0. \quad (36)$$

を考える．これは，2 次系の伝達関数

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 0.005s + 1} \quad (37)$$

の状態空間実現である．初期値を  $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 1)$ ，終端時刻を  $T = 20$  として， $L^1$  および  $L^2$  最適制御を求めると，図 5 のような制御入力が見られる． $L^2$  最適制御はほとんどすべての  $t \in [0, 20]$  で 0 以外の値を取る一方， $L^1$  最適制御はその大部分が 0 の値を取り，それ以外では， $\pm 1$  の値を取る．これらの制御信号を単純な一様量子化で符号化する場合，上で述べたような方策により， $L^2$  最適制御よりもはるかに小さいデータサイズで制御信号を送送できることがわかる．対応する状態  $(x_1(t), x_2(t))$  の遷移を図 6 に示す． $L^2$  最適制御による状態遷移は滑らかに原点に収束しているが， $L^1$  最適制御では，切り替えにより急激に遷移の方向を替えながら状態が原点に向かっていることがわかる．

また，もし状態  $x(t)$  がすべて観測できれば，送信信号はより単純になる場合がある．例えば，(5) で与えられる 2 重積分

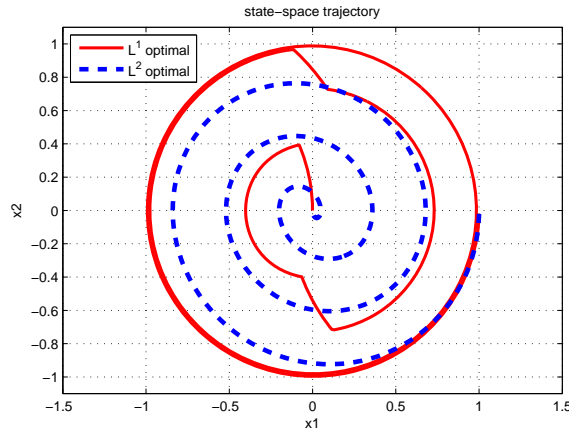


図 6 状態  $(x_1(t), x_2(t))$  の軌跡:  $L^1$  最適制御 (実線) および  $L^2$  最適制御

器に対する  $L^1$  最適制御を考える．初期値を  $x_1$  軸上の点，すなわち  $(x_1(0), x_2(0)) = (\xi_1, 0)$ ,  $\xi_1 > 0$  とする．この初期値から原点まで状態を遷移させる最短時間は

$$T^* = 2\sqrt{\xi_1} \quad (38)$$

と求められ，解が存在するために， $T \geq T^*$ ，すなわち

$$\xi_1 \leq T^2/4 \quad (39)$$

を仮定する．補題 1 より， $L^1$  最適制御はある時刻  $t_1$  まで  $u(t) = -1$ ,  $t_1$  から  $t_2$  まで  $u(t) = 0$ ，以降は終端時刻  $T$  まで  $u(t) = 1$  と切り替える制御である．この切り替え時刻  $t_1$  と  $t_2$  は，状態を観測することにより求めることができる．すなわち，最初の切り替え時刻  $t_1$  は，状態の軌道  $(x_1(t), x_2(t))$  と曲線

$$\Gamma(T) = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{3}{2}x_2^2 - Tx_2, x_2 < 0, x_1 > \frac{1}{2}x_2^2 \right\} \quad (40)$$

が交わる時刻であり，また  $t_2$  は状態の軌道と (17) で定義された曲線  $\gamma$  が交わる時刻である．すなわち，初期時刻に  $-1$  (制御の値を  $-1$  にする) を送信する．以降，状態  $(x_1(t), x_2(t))$  を常に観測し，曲線  $\Gamma(T)$  と交わるタイミングで  $+1$  (制御の値を  $+1$  する) の信号を送信する．次に曲線  $\gamma$  と交わるタイミングで  $+1$  (制御の値を  $+1$  する) の信号を送信する．すると， $t = T$  で原点に状態が遷移するのである． $T$  秒間に 3 ビットの情報だけを送信するだけでよく，きわめて効率がよい．図 7 に対応する状態遷移の状況を図示する．

以上より，本稿で考察するようなスパースな制御信号は，帯域制限が存在するネットワーク化制御系での信号伝送において，きわめて有用であることがわかる．

## 6. おわりに

本稿では，古典的な  $L^1$  最適制御 (または最小燃料制御) の解のスパース性に着目し， $L^1$  最適制御が許容制御のうち最もスパースな制御 (すなわち  $L^0$  ノルムが最小の制御) であること

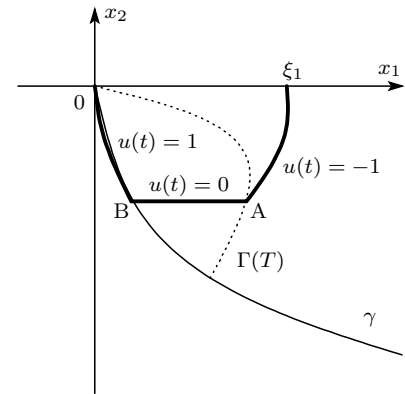


図 7  $L^1$  最適制御: 初期値  $(\xi_1, 0)$  から出発した状態が制御  $u(t) = -1$  によって A 点まで遷移し，曲線  $\Gamma(T)$  と交わる．この瞬間に制御を 0 とし，AB 間を遷移する．B 点で制御を  $u(t) = 1$  に切り替えれば，原点に到達する．

を示した．また，スパースな制御入力信号は，ネットワーク制御系における制御信号の伝送にきわめて有効であることを示した．本稿では時不変線形制御系について，その  $L^1$  最適制御解を考察したが，例えば入力アフィンな非線形制御系への拡張は容易である．また，本稿で考察した制御系はフィードフォワード制御系であるが，[8], [9] で考察したようなモデル予測制御の枠組みへの拡張は，フィードバック制御系の構成という観点からも重要である．

謝辞 本研究は，科学研究費補助金，基盤研究 (C)(24560543) の助成を受けたものである．

## 文 献

- [1] M. Athans and P. L. Falb, *Optimal Control*, Dover Publications, 2007; an unabridged republication of the work published by McGraw-Hill in 1966.
- [2] A. Bemporad, M. Heemels, and M. Johansson, *Networked Control Systems*, Springer, Oct. 2010.
- [3] Y. C. Eldar and G. Kutyniok, *Compressed Sensing*, Cambridge University Press, 2012.
- [4] K. Hayashi, M. Nagahara, and T. Tanaka, “A user’s guide to compressed sensing for communications systems,” *IEICE Trans. on Communications*, Vol. E96-B, No. 3, pp. 685–712, 2013.
- [5] J. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu, A survey of recent results in networked control systems, *Proc. IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 138–162, Jan. 2007.
- [6] 永原，松田，林，圧縮センシングの遠隔制御系への応用，第 25 回信号処理シンポジウム，2010．
- [7] M. Nagahara and T. Matsuda and K. Hayashi Compressive sampling for remote control systems, *IEICE Trans. on Fundamentals*, Vol. E95-A, No. 4, pp. 713–722, 2012.
- [8] M. Nagahara and D. E. Quevedo, Sparse representations for packetized predictive networked control, *IFAC world congress*, pp. 84–89, 2011.
- [9] M. Nagahara, D. E. Quevedo, and J. Østergaard, “Packetized predictive control for rate-limited networks via sparse representation,” *Proc. of 51th IEEE CDC*, pp. 1362–1367, 2012.
- [10] 大塚，非線形最適制御入門，コロナ社，2011.
- [11] 田中，圧縮センシングの数理，*IEICE Fundamental Review*, Vol. 4, No. 1, pp. 39–47, 2010.
- [12] W. Zhang, M. Branicky, and S. Phillips, Stability of networked control systems, *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 21, no. 1, pp. 84–99, Feb. 2001.